УДК 519.652

АНАЛОГ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ С ПОГРАНСЛОЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ[1)]

А.И. ЗАДОРИН

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
E-mail zadorin@ofim.oscsbras.ru

ANALOGUE OF CUBIC SPLINE FOR THE INTERPOLATION OF FUNCTIONS WITH A BOUNDARY LAYER COMPONENT

A.I. ZADORIN

Sobolev Institute of mathematics SB RAS

Аннотация

Исследуется вопрос интерполяции функций с погранслойной составляющей. Применение гладкого кубического сплайна приводит к значительным погрешностям при наличии больших градиентов интерполируемой функции в пограничном слое. Строится аналог кубического сплайна с учетом того, чтобы сплайн-интерполяционная формула была точной на погранслойной составляющей. Приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие преимущество в точности построенного сплайна.

Ключевые слова: Функция, пограничный слой, интерполяция, кубический сплайн, модификация.

Summary

Interpolation problem for a functions with a boundary layer component is investigated. An application of the smooth cubic spline to functions with large gradients in a boundary layer leads to significant errors. An analogue of cubic spline, which is exact on a boundary layer component, is constructed. Numerical results confirmed the advantage in accuracy of constructed spline.

Key words: Function, boundary layer, interpolation, cubic spline, modification.

Введение

В работе построим аналог кубического сплайна для интерполяции функции, имеющей большие градиенты в области пограничного слоя. Пусть интерполируемая функция $u(x)$ представима в виде:

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \quad x \in [0, 1], \tag{1}$$

где регулярная составляющая $p(x)$ имеет ограниченные производные до четвертого порядка, погранслойная составляющая $\Phi(x)$ является известной функцией, имеющей большие градиенты, постоянная γ не задана. Представление (1) справедливо для решения сингулярно возмущенной краевой задачи [1].

В [2], [3] исследовался интерполяционный многочлен Лагранжа для интерполяции функций вида (1). Показано, что интерполяция Лагранжа в случае равномерной сетки может приводить к погрешностям порядка $O(1)$. В этих работах предложены интерполяционные формулы, точные на погранслойной составляющей $\Phi(x)$. Полученные оценки погрешности и численные эксперименты подтвердили, что погрешность таких формул равномерна по градиентам погранслойной составляющей.

1) Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00618) и ОМН РАН (проект 1.3.2 2012)

Интерполяционные полиномиальные сплайны дефекта один нашли широкое применение для интерполяции функций. Однако их применение приводит к существенным погрешностям в случае функций с большими градиентами в пограничном слое. В [4] для интерполяции функций с погранслойной составляющей построен аналог квадратического сплайна дефекта один. Построенный неполиномиальный сплайн является точным на погранслойной составляющей. Доказано, что погрешность построенного сплайна равномерна по погранслойной составляющей и ее производным.

В данной работе для интерполяции функций с погранслойной составляющей строится аналог кубического сплайна дефекта один на основе того, чтобы сплайн был точным на погранслойной составляющей $\Phi(x)$.

1. Построение аналога кубического сплайна

Зададим равномерную сетку Ω :

$$\Omega=\{x_n : x_n=nh, n=0,1,\dots,N,\ x_0=0,\ x_N=1, \Delta_n=[x_{n-1},x_n]\ \}.$$

Функция $u(x)$ задана в узлах сетки, $u_n=u(x_n),\ n=0,1,2,\dots,N.$

При построении аналога кубического сплайна $S_\Phi(u,x)$ для функции $u(x)$ вида (1) исходим из того, чтобы сплайн был точным на составляющей $\Phi(x)$ и чтобы выполнилось условие гладкости $S_\Phi(u,x)\in C^2[0,1]$.

Для этого на произвольном сеточном интервале $[x_{n-1},x_n]$ зададим интерполяцию второй производной сплайна $S_\Phi(u,x)$, точную на функции $\Phi''(x)$:

$$S''_\Phi(u,x)=M_{n-1}+\Big(M_n-M_{n-1}\Big)\frac{\Phi''(x)-\Phi''_{n-1}}{\Phi''_n-\Phi''_{n-1}},\ x\in\Delta_n, \tag{2}$$

где $M_n=S''_\Phi(u,x_n),\ \Phi''_n=\Phi''(x_n)$. Дважды интегрируя в (2), получаем:

$$S_\Phi(u,x)=\Big(M_{n-1}-\frac{M_n-M_{n-1}}{\Phi''_n-\Phi''_{n-1}}\Phi''_{n-1}\Big)\frac{(x-x_{n-1})^2}{2}+\frac{M_n-M_{n-1}}{\Phi''_n-\Phi''_{n-1}}\Phi(x)+$$
$$+K_1(x-x_{n-1})+K_2. \tag{3}$$

Из условий интерполяции $S_\Phi(u,x_{n-1})=u_{n-1},\ S_\Phi(u,x_n)=u_n$ для сеточного интервала Δ_n находим постоянные K_1,K_2. Тогда получаем:

$$S_\Phi(u,x)=\frac{M_n-M_{n-1}}{\Phi''_n-\Phi''_{n-1}}\Big(\Phi(x)-\Phi_{n-1}-\frac{\Phi_n-\Phi_{n-1}}{h}(x-x_{n-1})-\frac{1}{2}\Phi''_{n-1}(x-x_{n-1})(x-x_n)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}M_{n-1}(x-x_{n-1})(x-x_n)+(u_n-u_{n-1})\frac{x-x_{n-1}}{h}+u_{n-1},\ x\in\Delta_n. \tag{4}$$

Остановимся на нахождении постоянных M_n. По построению $S_\Phi(u,x)\in C^2[0,1]$, поэтому для $n=1,2,\dots,N-1$

$$S'_\Phi(u,x_n-0)=S'_\Phi(u,x_n+0).$$

Учитывая (4), получаем соотношение на неизвестные постоянные $\{M_n\}$:

$$\frac{1}{h^2(\Phi''_n-\Phi''_{n-1})}\Big(\Phi_n-\Phi_{n-1}-h\Phi'_n+\frac{h^2}{2}\Phi''_n\Big)M_{n-1}+$$
$$+\Big[1-\frac{1}{h^2(\Phi''_n-\Phi''_{n-1})}\Big(\Phi_n-\Phi_{n-1}-h\Phi'_n+\frac{h^2}{2}\Phi''_n\Big)-$$
$$-\frac{1}{h^2(\Phi''_{n+1}-\Phi''_n)}\Big(\Phi_{n+1}-\Phi_n-h\Phi'_n-\frac{h^2}{2}\Phi''_n\Big)\Big]M_n+$$

$$+\frac{1}{h^2(\Phi''_{n+1}-\Phi''_n)}\Big(\Phi_{n+1}-\Phi_n-h\Phi'_n-\frac{h^2}{2}\Phi''_n\Big)M_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2}. \qquad (5)$$

Соотношения (5) дополним краевыми условиями и полученную систему запишем в виде:

$$A_nM_{n-1}+(1-A_n-C_n)M_n+C_nM_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2},\ 1<n<N,$$

$$M_0=u''(0),\ M_N=u''(1). \qquad (6)$$

Докажем, что построенный сплайн $S_\Phi(u,x)$ является точным на погранслойной составляющей $\Phi(x)$. Пусть $u(x)=\Phi(x)$. Несложно убедиться, что тогда $M_j=\Phi''_j,\ \ j=0,1,\dots,N$ является решением системы (6) Тогда из (4) получаем, что $S_\Phi(\Phi,x)=\Phi(x)$.

Исследуем свойства системы (6). Пусть на каждом сеточном интервале Δ_n производная $\Phi'''(x)$ сохраняет знак. Покажем, что в этом случае матрица системы (6) является диагонально преобладающей. На основе разложения функции $\Phi(x)$ в ряд Тейлора можно показать, что для некоторых $s_1,s_2\in\Delta_{n+1}$ выполнится:

$$C_n=\Phi'''(s_1)/(6\Phi'''(s_2))>0.$$

Аналогично, для некоторых $s_3,s_4\in\Delta_n$

$$A_n=\Phi'''(s_3)/(6\Phi'''(s_4))>0.$$

Покажем, что $C_n<1/2$. Имеем:

$$C_n=\frac{1}{h^2(\Phi''_{n+1}-\Phi''_n)}\Big(\Phi_{n+1}-\Phi_n-h\Phi'_n-\frac{h^2}{2}\Phi''_n\Big)=$$

$$=\frac{1}{h^2(\Phi''_{n+1}-\Phi''_n)}\Big(\frac{h^2}{2}\Phi''(s)-\frac{h^2}{2}\Phi''_n\Big)=\frac{1}{2}\times\frac{\Phi''(s)-\Phi''_n}{\Phi''_{n+1}-\Phi''_n}<\frac{1}{2}.$$

Мы учли, что $s\in(x_n,x_{n+1})$ и производная $\Phi'''(x)$ сохраняет знак на интервале (x_n,x_{n+1}). Аналогично можно показать, что $A_n<1/2$. Итак,

$$0<A_n<\frac{1}{2},\ 0<C_n<\frac{1}{2}. \qquad (7)$$

Рассмотрим случай, соответствующий экспоненциальному пограничном слою, когда $\Phi(x)=\exp(-\varepsilon^{-1}x)$. Тогда

$$C_n=\Big[\frac{h^2}{2}+\varepsilon^2-\varepsilon^2\exp(-\varepsilon^{-1}h)-\varepsilon h\Big]\Big/\Big[h^2(1-\exp(-\varepsilon^{-1}h))\Big]. \qquad (8)$$

Из (8) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}C_n(\varepsilon)=\frac{1}{2}.$$

Аналогично,

$$\lim_{\varepsilon\to0}A_n(\varepsilon)=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, при накладываемом ограничении, что производная $\Phi^{(3)}(x)$ сохраняет знак на сеточных интервалах, оценки (7) являютсяся не улучшаемыми.

В случае $\Phi(x)=x^3$ сплайн (4), (6) становится кубическим, при этом $A_n=C_n=1/6$.

2. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим функцию с погранслойной составляющей

$$u(x)=\exp(-x/\varepsilon)+\cos(x),\ \ x\in[0,1],\ \varepsilon\in(0,1].$$

Таблица 1: Погрешность интерполяции сплайном (4),(6).

ε	h				
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}
1	1.37e-007	8.51e-009	5.30e-010	3.31e-011	2.07e-012
2^{-1}	2.22e-007	1.37e-008	8.54e-010	5.33e-011	3.33e-012
2^{-2}	3.96e-007	2.43e-008	1.51e-009	9.38e-011	5.85e-012
2^{-3}	7.62e-007	4.61e-008	2.83e-009	1.75e-010	1.09e-011
2^{-4}	1.56e-006	9.19e-008	5.56e-009	3.41e-010	2.11e-011
2^{-5}	3.30e-006	1.91e-007	1.13e-008	6.82e-010	4.18e-011
2^{-6}	6.61e-006	4.10e-007	2.37e-008	1.40e-009	8.44e-011
2^{-7}	1.02e-005	8.27e-007	5.12e-008	2.96e-009	1.74e-010
2^{-8}	1.20e-005	1.29e-006	1.03e-007	6.39e-009	3.69e-010
2^{-9}	1.25e-005	1.51e-006	1.61e-007	1.29e-008	7.98e-010

Таблица 2: Вычисленный порядок точности сплайна (4), (6)

ε	h			
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
1	4.01e+000	4.00e+000	4.00e+000	4.00e+000
2^{-1}	4.01e+000	4.01e+000	4.00e+000	4.00e+000
2^{-2}	4.02e+000	4.01e+000	4.01e+000	4.00e+000
2^{-3}	4.05e+000	4.02e+000	4.01e+000	4.01e+000
2^{-5}	4.11e+000	4.08e+000	4.05e+000	4.03e+000
2^{-6}	4.01e+000	4.11e+000	4.09e+000	4.05e+000
2^{-8}	3.22e+000	3.64e+000	4.02e+000	4.11e+000
2^{-9}	3.05e+000	3.23e+000	3.64e+000	4.02e+000

Определим погрешность интерполяции для заданных ε и h:

$$\Delta_h = \max_j |S_\Phi(u, \tilde{x}_j) - u(\tilde{x}_j)|, \;\; \tilde{x}_j = \frac{x_{j-1} + x_j}{2}, \; j = 1, 2, \ldots, N.$$

В табл. 1 представлена погрешность Δ_h сплайн-интерполяциионной формулы (4), (6) для различных значений ε и h.

Определим вычисленный порядок точности

$$CR_h = \log_2 \left(\Delta_h / \Delta_{h/2}\right).$$

В табл. 2 представлен вычисленный порядок точности CR_h сплайн-интерполяции (4), (6) для различных значений ε и h. Подтверждается четвертый порядок точности при $\varepsilon = 1$ и третий порядок точности при малых значениях ε.

В табл. 3 для сравнения представлена погрешность Δ_h кубической сплайн-интерполяции дефекта один при различных значениях ε и h. При малых значениях ε погрешность интерполяции порядка $O(1)$.

Таким образом, построенный аналог кубического сплайна, точный на погранслойной составляющей, имеет преимущество в точности в сравнении с кубическим сплайном.

В таблицах $e \pm m$ означает $10^{\pm m}$.

Таблица 3: Погрешность кубической сплайн-интерполяции

ε	h				
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}
1	1.95e-007	1.22e-008	7.64e-010	4.78e-011	2.99e-012
2^{-1}	1.62e-006	1.03e-007	6.46e-009	4.05e-010	2.54e-011
2^{-2}	2.38e-005	1.53e-006	9.70e-008	6.10e-009	3.83e-010
2^{-3}	3.55e-004	2.37e-005	1.53e-006	9.67e-008	6.08e-009
2^{-4}	4.89e-003	3.55e-004	2.37e-005	1.53e-006	9.66e-008
2^{-5}	5.57e-002	4.89e-003	3.55e-004	2.37e-005	1.53e-006
2^{-6}	4.55e-001	5.57e-002	4.89e-003	3.55e-004	2.37e-005
2^{-7}	2.55e+000	4.55e-001	5.57e-002	4.89e-003	3.55e-004
2^{-8}	1.13e+001	2.55e+000	4.55e-001	5.57e-002	4.89e-003
2^{-9}	4.65e+001	1.13e+001	2.55e+000	4.55e-001	5.57e-002

3. Заключение.

Исследовано применение кубического сплайна дефекта один для интерполяции функций с погранслойной составляющей. Показано, что применение такого сплайна к функциям, имеющим большие градиенты в пограничном слое, приводит к существенным погрешностям. Предложена модификация кубического сплайна, при которой сплайн становится неполиномиальным и точным на погранслойной составляющей. Численно показано, что это приводит к тому, что погрешность становится равномерной по погранслойным изменениям интерполируемой функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.** Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions. Revised Edition. — Singapore: World Scientific Publishing, 2012. — 176 p.
2. **Задорин А.И., Задорин Н.А.** Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслойной составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2010.— Т. 50, № 2.— С. 221—233.
3. **Zadorin A.I., Zadorin N.A.** Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2012. — V. 9. — P. 445—455.
4. **Zadorin A.I.** Spline interpolation of functions with a boundary layer component // International Journal of Numerical Analysis and Modeling, series B. — 2011. — V. 2, № 2-3. — P. 262—279.

REFERENCES

1. **Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.** Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions. Revised Edition. — Singapore: World Scientific Publishing, 2012. — 176 p.

2. **Zadorin A.I., Zadorin N.A.** Spline interpolation on a uniform grid for functions with a boundary-layer component // Computational mathematics and mathematical physics. — 2010.— V. 50, № 2.— C. 211—223.
3. **Zadorin A.I., Zadorin N.A.** Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2012. — V. 9. — P. 445—455.
4. **Zadorin A.I.** Spline interpolation of functions with a boundary layer component // International Journal of Numerical Analysis and Modeling, series B. — 2011. — V. 2, № 2-3. — P. 262—279.